数理解析研究所講究録
906 巻 1995 年 132-137

知識命題の標準形を用いる妥当性検証

大芝　猛　(Takeshi OSHIBA)*
小橋 一秀　(Kazuhide KOBASHI)†

m 個の命題変数 $p_1, \cdots, p_m$ に対し、論理記号$\wedge, \vee, \supset, \neg$の他に、異なる n 人に対する "know" 記号 $\mathbf{K}_1, \cdots, \mathbf{K}_n$ を用いてうる知識論理式全体を $\mathcal{L}$ とする。そのうち know 記号の operate の深さが k のものを $\mathcal{L}^{(k)}$ とする[1]。

演繹体系 $\mathbf{K}$ は言語 $\mathcal{L}$ について、次の公理と推論からなる。

a0　トートロジー論理式

a1　$\mathbf{K}_i(A) \supset A$

a2　$\mathbf{K}_i(A) \supset \mathbf{K}_i(\mathbf{K}_i(A))$

a3　$\neg\mathbf{K}_i(A) \supset \mathbf{K}_i(\neg\mathbf{K}_i(A))$

a4　$\mathbf{K}_i(A) \wedge \mathbf{K}_i(B) \supset \mathbf{K}_i(A \wedge B)$

a5　$\mathbf{K}_i(A \supset B) \supset (\mathbf{K}_i(A) \supset \mathbf{K}_i(B))$

$$\frac{A \quad A \supset B}{B}\ (\text{MP-rule}) \qquad \frac{A}{\mathbf{K}_i(A)}\ (\mathbf{K}_i\text{-rule})$$

この体系 $\mathbf{K}$ で論理式 A が証明可能なことを "$\vdash A$" で表わす。

以下 "strictly know" なる概念に対応する記号 $\mathbf{K}_i[\ ]$ とこれにもとづく world なる式を導入し、さらに論理式 A に対する一種の $\wedge$-$\vee$ 標準形展開を意味する world の集合 $\mathbf{W}_A$ を定義する。その上で $\mathbf{W}_A$ を用いて "$\vdash A$" を判定する 1 つのシンタクティカルなアルゴリズムを提起する (定理 17) 。

定義 1 $\mathbf{W}^{(k)}$: *degree* k の *world* の集合

$$\mathbf{W}^{(0)} = \left\{ p_1^{\delta_1} \wedge \cdots \wedge p_m^{\delta_m} \;\middle|\; \delta_1, \cdots, \delta_m \in \{0,1\} \right\} \quad , \quad p^{\delta} = \begin{cases} p & (\delta = 1) \\ \neg p & (\delta = 0) \end{cases}$$

$$\mathbf{W}^{(k+1)} = \left\{ <g\ , \begin{pmatrix} \mathbf{K}_1[\mathbf{U}_1] \\ \vdots \\ \mathbf{K}_n[\mathbf{U}_n] \end{pmatrix} > \;\middle|\; g \in \mathbf{W}^{(k)},\ \mathbf{U}_1, \cdots, \mathbf{U}_n \subseteq \mathbf{W}^{(k)} \right\}$$

記法　$f = <g\ , \begin{pmatrix} \mathbf{K}_1[\mathbf{U}_1] \\ \vdots \\ \mathbf{K}_n[\mathbf{U}_n] \end{pmatrix} > \in \mathbf{W}^{(k+1)}$ に対し　$g = f^{<k+1}$, $\mathbf{U}_i = f_i^{(k+1)}$ とおく

定義 2 *strictly know* $\mathbf{K}_i[\ ]$ 等の論理的意味付け "$*$"

- $\mathbf{U} \subseteq \mathbf{W}^{(k)}$ に対し、

$$^*\mathbf{K}_i[\mathbf{U}] \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{K}_i(^*\mathbf{U}) \wedge \bigwedge_{\mathbf{U} \subsetneq \mathbf{V} \subseteq \mathbf{W}^{(k)}} \neg\mathbf{K}_i(^*\mathbf{V})$$

---

*名古屋工業大学
†名古屋工業大学
[1] $\mathcal{L} = \mathcal{L}^{(0)} \cup \mathcal{L}^{(1)} \cup \cdots$ ($\mathcal{L}^{(0)}$ は命題論理式全体)

- $\mathbf{U} = \{g_1, \cdots, g_d\}$ のとき、$^*\mathbf{U} \stackrel{\mathrm{def}}{=} {}^*g_1 \vee \cdots \vee {}^*g_d$
- $f = \ <g\ ,\ \begin{pmatrix} \mathbf{K}_1[\mathbf{U}_1] \\ \vdots \\ \mathbf{K}_n[\mathbf{U}_n] \end{pmatrix} >$ に対し、$^*f \stackrel{\mathrm{def}}{=} {}^*g \wedge \bigwedge_{i=1}^{n} {}^*\mathbf{K}_i[\mathbf{U}_i]$

補助定理 0 $\mathbf{U}, \mathbf{V} \subseteq \mathbf{W}^{(k)}$ に対し、

$$\vdash\ {}^*\mathbf{K}_i[\mathbf{U}] \wedge \mathbf{K}_i({}^*\mathbf{V}) \equiv \begin{cases} {}^*\mathbf{K}_i[\mathbf{U}] & \mathrm{if}\mathbf{U} \subseteq \mathbf{V} \quad (1) \\ \perp\ (\text{矛盾}) & \mathrm{if}\mathbf{U} \not\subseteq \mathbf{V} \quad (2) \end{cases}$$

補助定理 1 $\mathbf{U}, \mathbf{V} \subseteq \mathbf{W}^{(k)}$ に対し、$\mathbf{U} \neq \mathbf{V} \Rightarrow \vdash ({}^*\mathbf{K}_i[\mathbf{U}] \wedge {}^*\mathbf{K}_i[\mathbf{V}] \equiv \perp)$

補助定理 2 $f, g \in \mathbf{W}^{(k)}$ に対し、

$$f \neq g \Rightarrow \vdash {}^*f \wedge {}^*g \equiv \perp$$

但し、$\mathbf{U} = \mathbf{V}$ は集合の等号、$f = g$ は式としての等号。

補助定理 3 $\mathbf{U}, \mathbf{V} \subseteq \mathbf{W}^{(k)}$ に対し、$\mathbf{U} \cap \mathbf{V} = \phi \Rightarrow \vdash {}^*\mathbf{U} \wedge {}^*\mathbf{V} \equiv \perp$

補助定理 4 $\mathbf{U}, \mathbf{V}$ に対し、$\vdash {}^*(\mathbf{U} \cap \mathbf{V}) \equiv {}^*\mathbf{U} \wedge {}^*\mathbf{V}$

定理 5 $\mathbf{U} \subseteq \mathbf{W}^{(k)}$ に対し、

$$\vdash {}^*\mathbf{K}_i[\mathbf{U}] \equiv \mathbf{K}_i({}^*\mathbf{U}) \wedge \bigwedge_{\mathbf{V} \subsetneq \mathbf{U}} \neg \mathbf{K}_i({}^*\mathbf{V})$$

定理 6 $\mathbf{U} \subseteq \mathbf{W}^{(k)}$ に対し、

$$\vdash \mathbf{K}_i({}^*\mathbf{U}) \equiv \bigvee_{\mathbf{V} \subseteq \mathbf{U}} {}^*\mathbf{K}_i[\mathbf{V}] \qquad [\text{定理5を用いる}]$$

定理 7 $\vdash {}^*\mathbf{W}^{(k)}$ [定理6を用いる]

定義 3 $\deg(A) = A$ 内の $\mathbf{K}_1, \cdots, \mathbf{K}_n$ 演算の深さの最大値

$$\mathcal{L}^{(k)} = \{A \in \mathcal{L} \mid \deg(A) = k\}$$

定義 4 *world* の集りの "条件なし拡張" と "限定"

$$\mathbf{U} \subseteq \mathbf{W}^{(k)} \quad \text{に対し} \quad \mathbf{U}' = \left\{ <f\ ,\ \begin{pmatrix} \mathbf{K}_1[\mathbf{U}_1] \\ \vdots \\ \mathbf{K}_n[\mathbf{U}_n] \end{pmatrix} > \middle|\ f \in \mathbf{U},\ \mathbf{U}_1, \cdots, \mathbf{U}_n \subseteq \mathbf{W}^{(k)} \right\}$$

$$\mathbf{V} \subseteq \mathbf{W}^{(k+1)} \quad \text{に対し} \quad {}'\mathbf{V} = \left\{ g \ \middle|\ <g\ ,\ \begin{pmatrix} \mathbf{K}_1[\mathbf{U}_1] \\ \vdots \\ \mathbf{K}_n[\mathbf{U}_n] \end{pmatrix} > \in \mathbf{V},\ \text{for some} \mathbf{U}_1, \cdots, \mathbf{U}_n \subseteq \mathbf{W}^{(k)} \right\}$$

定義 5 $\mathbf{U} \subseteq \mathbf{W}^{(k)}$ $\ l \geq k$ に対し $\mathbf{U}^{<l>} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \mathbf{U}^{\overbrace{\prime\cdots\prime}^{l-k}}$

補助定理 8 $\mathbf{U} \subseteq \mathbf{W}^{(k)}$ に対し ${}'(\mathbf{U}') = \mathbf{U}$

補助定理 9 $\mathbf{U},\mathbf{V}\subseteq\mathbf{W}^{(k)}$ に対し

$$\begin{aligned}(\mathbf{U}\cap\mathbf{V})' &= \mathbf{U}'\cap\mathbf{V}' &(1)\\(\mathbf{U}\cup\mathbf{V})' &= \mathbf{U}'\cup\mathbf{V}' &(2)\\(\mathbf{W}^{(k)}-\mathbf{U})' &= \mathbf{W}^{(k+1)}-\mathbf{U}' &(3)\end{aligned}$$

補助定理 10 $\mathbf{U}\subseteq\mathbf{W}^{(k)}$ に対し $\vdash {}^*(\mathbf{U}')\equiv{}^*\mathbf{U}$

補助定理 11 $\mathbf{U}\subseteq\mathbf{W}^{(k)}$, $l\geq k$ に対し $\vdash {}^*(\mathbf{U}^{<l>})\equiv{}^*\mathbf{U}$

定義 6 論理式 A に対する *world* の集合 $\mathbf{W}_A$ (一種の $\wedge-\vee$ 標準系展開)

$$\begin{aligned}\mathbf{W}_{p_j} &= \left\{p_1^{\delta_1}\wedge\cdots\wedge p_{j-1}^{\delta_{j-1}}\wedge p_j\wedge p_{j+1}^{\delta_{j+1}}\wedge\cdots\wedge p_m^{\delta_m}\,\middle|\,\delta_1,\cdots,\delta_{j-1},\delta_{j+1},\cdots,\delta_m\in\{0,1\}\right\} &(4)\\\mathbf{W}_{B\wedge C} &= \mathbf{W}_B^{<k>}\cap\mathbf{W}_C^{<k>}\qquad k=\max(\deg(B),\deg(C)) &(5)\\\mathbf{W}_{B\vee C} &= \mathbf{W}_B^{<k>}\cup\mathbf{W}_C^{<k>}\qquad k=\max(\deg(B),\deg(C)) &(6)\\\mathbf{W}_{\neg B} &= \mathbf{W}^{(k)}-\mathbf{W}_B\qquad k=\deg(B) &(7)\\\mathbf{W}_{\mathbf{K}_i(B)} &= \left\{f\in\mathbf{W}^{(k+1)}\,\middle|\,f_i^{(k+1)}\subseteq\mathbf{W}_B\right\},\ \text{但し}\ f=<f^{<k+1},\begin{pmatrix}\mathbf{K}_1[f_1^{(k+1)}]\\\vdots\\\mathbf{K}_i[f_i^{(k+1)}]\\\vdots\\\mathbf{K}_n[f_n^{(k+1)}]\end{pmatrix}> &(8)\end{aligned}$$

また $B\supset C$: $\neg B\vee C$ または $\mathbf{W}_{B\supset C}=(\mathbf{W}^{(k)}-\mathbf{W}_B^{<k>})\cup\mathbf{W}_C^{<k>}$, $k=\max(\deg(B),\deg(C))$

定理 12

$$\vdash A\equiv{}^*\mathbf{W}_A$$

[付録参照]

定義 7 $\vdash A$ を規定するため *world* の部分集合 $\mathbf{S}^{(k)}\subseteq\mathbf{W}^{(k)}$ を導入する。

$$\begin{aligned}\mathbf{S}^{(0)} &= \mathbf{W}^{(0)} &(9)\\\mathbf{S}^{(1)} &= \left\{<g,\begin{pmatrix}\mathbf{K}_1[\mathbf{U}_1]\\\vdots\\\mathbf{K}_n[\mathbf{U}_n]\end{pmatrix}>\,\middle|\,\begin{array}{ll}0) & g\in\mathbf{S}^{(0)}\\1) & \forall i(g\in\mathbf{U}_i\subseteq\mathbf{S}^{(0)})\end{array}\right\} &(10)\\\mathbf{S}^{(k+2)} &= \left\{<g,\begin{pmatrix}\mathbf{K}_1[\mathbf{U}_1]\\\vdots\\\mathbf{K}_n[\mathbf{U}_n]\end{pmatrix}>\,\middle|\,\begin{array}{ll}0) & g\in\mathbf{S}^{(k+1)}\\1) & \forall i(g\in\mathbf{U}_i\subseteq\mathbf{S}^{(k+1)})\\2) & \forall i(\forall f\in\mathbf{U}_i\Rightarrow f_i^{(k+1)}=g_i^{(k+1)})\\3) & \forall i({}'\mathbf{U}_i=g_i^{(k+1)})\end{array}\right\}(k\geq 0) &(11)\end{aligned}$$

但し $\mathbf{U}\subseteq\mathbf{S}^{(l)}$ に対し ${}'\mathbf{U}\stackrel{\text{def}}{=}\{f^{<l}|f\in\mathbf{U}\}$ *(restrictions of* $\mathbf{U}$*)*

補助定理 13 $\forall k\ (f\in\mathbf{W}^{(k)}-\mathbf{S}^{(k)}\Rightarrow\vdash{}^*f\equiv\perp)$

定理 14 $\forall k(\vdash {}^*\mathbf{S}^{(k)})$

$$\begin{aligned} {}^*\mathbf{S}^{(k)} &\equiv {}^*\mathbf{S}^{(k)} \vee \perp \\ &\equiv {}^*\mathbf{S}^{(k)} \vee {}^*(\mathbf{W}^{(k)} - \mathbf{S}^{(k)}) \quad \text{補助定理 13} \\ &\equiv {}^*(\mathbf{S}^{(k)} \cup (\mathbf{W}^{(k)} - \mathbf{S}^{(k)})) \\ &\equiv {}^*\mathbf{W}^{(k)} \end{aligned}$$

従って 定理7 より $\vdash {}^*\mathbf{S}^{(k)}$

補助定理 15 A が **a0** ～ **a5** の公理のとき

$$\deg(A) = k \;\Rightarrow\; \mathbf{W}_A \cap \mathbf{S}^{(k)} = \mathbf{S}^{(k)}$$

補助定理 16

(1) 推論 $\dfrac{A \quad A \supset B}{B}$ (M.P.) に関して、$\deg(A) = d, \deg(B) = l,\ \max(d, l) = k$ のとき、

$$\mathbf{W}_A \cap \mathbf{S}^{(d)} = \mathbf{S}^{(d)},\ \ \mathbf{W}_{A \supset B} \cap \mathbf{S}^{(k)} = \mathbf{S}^{(k)} \Rightarrow \mathbf{W}_B \cap \mathbf{S}^{(l)} = \mathbf{S}^{(l)}$$

(2) 推論 $\dfrac{A}{\mathbf{K}_i(A)}$ $(\mathbf{K}_i)$ に関して、$\deg(A) = k$ のとき、

$$\mathbf{W}_A \cap \mathbf{S}^{(k)} = \mathbf{S}^{(k)} \Rightarrow \mathbf{W}_{\mathbf{K}_i(A)} \cap \mathbf{S}^{(k+1)} = \mathbf{S}^{(k+1)}$$

[付録参照]

定理 17 $\deg(A) = k$ のとき

$$\vdash A \iff \mathbf{W}_A \cap \mathbf{S}^{(k)} = \mathbf{S}^{(k)}$$
$$[\iff \mathbf{S}^{(k)} \subseteq \mathbf{W}_A]$$

"$\Rightarrow$ part" は補助定理 15と補助定理 16から、
"$\Leftarrow$ part":

$$\begin{aligned} \mathbf{W}_A \cap \mathbf{S}^{(k)} = \mathbf{S}^{(k)} \Rightarrow {}^*\mathbf{S}^{(k)} &\equiv {}^*(\mathbf{W}_A \cap \mathbf{S}^{(k)}) \\ &\equiv {}^*\mathbf{W}_A \wedge {}^*\mathbf{S}^{(k)} \quad \text{補助定理 4} \\ &\equiv {}^*\mathbf{W}_A \quad \text{定理 14} \\ &\equiv A \quad \text{定理 12} \end{aligned}$$

従って、再び定理 14 から $\vdash A$

参考文献

[1] R. Fagin, J. Y. Halpern, M. Y. Vardi: *A Model-Theoretic Analysis of Knowledge Preliminiary Report, 25thFOCS*

[2] J. Hintikka: *Knowledge and belief , Cornell University Press 1962*

[3] M. Sato: *A study of Kripke-type Models for some Modal Logics by Gentzen's Sequential Method Publications Research Institute for Mathematical Science , Kyoto University ,1977*

付録

定理 12 の証明:

A 内の論理記号または $\mathbf{K}_i$ 記号の個数に関する帰納法を用いる。$\wedge, \vee, \neg, \supset$ に関しては省略。

$A = \mathbf{K}_i(B)$ の場合: $\deg(\mathbf{K}_i(B)) = k\ (\geq 1)$ とおく

$$
\begin{aligned}
\mathbf{K}_i(B) &\equiv \mathbf{K}_i({}^*\mathbf{W}_B) && \text{(帰納法の仮定)}\\
&\equiv {}^*\mathbf{W}^{(k)} \wedge \mathbf{K}_i({}^*\mathbf{W}_B) && \text{補助定理 7}\\
&\equiv \left(\bigvee_{f\in\mathbf{W}^{(k)}} {}^*f\right) \wedge \mathbf{K}_i({}^*\mathbf{W}_B)\\
&\equiv \bigvee_{f\in\mathbf{W}^{(k)}} \left({}^*f \wedge \mathbf{K}_i({}^*\mathbf{W}_B)\right)\\
&\equiv \bigvee_{\substack{f\in\mathbf{W}^{(k)}\\ f_i^k\subseteq\mathbf{W}_B}} \left({}^*f \wedge \underline{\mathbf{K}_i({}^*\mathbf{W}_B)}\right) \vee \bigvee_{\substack{f\in\mathbf{W}^{(k)}\\ f_i^k\not\subseteq\mathbf{W}_B}} \left({}^*f \wedge \underline{\mathbf{K}_i({}^*\mathbf{W}_B)}\right)
\end{aligned}
$$

$f_i^{(k)} \not\subseteq \mathbf{W}_B$ と補助定理 0-(2) から

$$\mathbf{K}_i[f_i^{(k)}] \wedge \underline{\mathbf{K}_i({}^*\mathbf{W}_B)} \equiv \perp$$

$$\overbrace{\boxed{{}^*f^{<k} \wedge \bigwedge_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} {}^*\mathbf{K}_j[f_j^{(k)}] \wedge {}^*\mathbf{K}_i[f_i^{(k)}]}} \wedge \underline{\mathbf{K}_i({}^*\mathbf{W}_B)}$$

$$\equiv \mathbf{K}_i[f_i^{(k)}]$$ $f_i^{(k)} \subseteq \mathbf{W}_B$ と補助定理 0-(1) から

$$
\begin{aligned}
&\equiv \bigvee_{\substack{f\in\mathbf{W}^{(k)}\\ f_i^k\subseteq\mathbf{W}_B}} {}^*f\\
&\equiv {}^*\left\{f \in \mathbf{W}^{(k)} \,\middle|\, f_i^{(k)} \subseteq \mathbf{W}_B\right\}\\
&\equiv {}^*\mathbf{W}_{\mathbf{K}_i(B)}
\end{aligned}
$$

補助定理 16 の証明:

(1) $\dfrac{A \quad A\supset B}{B}$MP について $\deg(A) = d,\ \deg(B) = l,\ \max(d,l) = k$ のとき

$\boxed{\mathbf{W}_A \cap \mathbf{S}^{(d)} = \mathbf{S}^{(d)}}$, $\mathbf{W}_{A\supset B} \cap \mathbf{S}^{(k)} = \mathbf{S}^{(k)} \implies$

$$
\begin{aligned}
\mathbf{S}^{(k)} &= \left(\left(\mathbf{W}^{(k)} - \mathbf{W}_A^{\overbrace{\prime\cdots\prime}^{k-d}}\right) \cup \mathbf{W}_B^{\overbrace{\prime\cdots\prime}^{k-l}}\right) \cap \mathbf{S}^{(k)}\\
&= \left(\left(\mathbf{W}^{(k)} \cap \mathbf{S}^{(k)}\right) - \underline{\left(\mathbf{W}_A^{\overbrace{\prime\cdots\prime}^{k-d}} \cap \mathbf{S}^{(k)}\right)}\right) \cup \left(\mathbf{W}_B^{\overbrace{\prime\cdots\prime}^{k-l}} \cap \mathbf{S}^{(k)}\right)
\end{aligned}
$$

$\boxed{\mathbf{S}^{(d)} \subseteq \mathbf{W}_A}$, $\mathbf{S}^{(k)} \subseteq \mathbf{S}^{(d)\overbrace{\prime\cdots\prime}^{k-d}} \subseteq \mathbf{W}_A^{\overbrace{\prime\cdots\prime}^{k-d}}$ であるから

$$
\begin{aligned}
&= \left(\left(\mathbf{S}^{(k)} - \underline{\mathbf{S}^{(k)}}\right) \cup \left(\mathbf{W}_B^{\overbrace{\prime\cdots\prime}^{k-l}} \cap \mathbf{S}^{(k)}\right)\right)\\
&= \mathbf{W}_B^{\overbrace{\prime\cdots\prime}^{k-l}} \cap \mathbf{S}^{(k)}
\end{aligned}
$$

即ち $\mathbf{S}^{(k)} = \mathbf{W}_B^{\overbrace{\prime\cdots\prime}^{k-l}} \cap \mathbf{S}^{(k)}$ 従って

$$
\begin{aligned}
\overbrace{/\cdots/}^{k-l}\mathbf{S}^{(k)} &= \overbrace{/\cdots/}^{k-l}(\mathbf{W}_B^{\overbrace{/\cdots/}^{k-l}} \cap \mathbf{S}^{(k)}) \\
&= \overbrace{/\cdots/}^{k-l}(\mathbf{W}_B^{\overbrace{/\cdots/}^{k-l}}) \cap \overbrace{/\cdots/}^{k-l}\mathbf{S}^{(k)}
\end{aligned}
$$

よって $\mathbf{S}^{(l)} = \mathbf{W}_B \cap \mathbf{S}^{(l)}$

(2) $\dfrac{A}{\mathbf{K}_i(A)}(\mathbf{K}_i)$ について $\deg(A) = k$ のとき

$\mathbf{W}_A \cap \mathbf{S}^{(k)} = \mathbf{S}^{(k)}$ 即ち $\mathbf{S}^{(k)} \subseteq \mathbf{W}_A$ を仮定

$$
\begin{aligned}
\mathbf{W}_{\mathbf{K}_i(A)} \cap \mathbf{S}^{(k+1)} &= \left\{ <f, \begin{pmatrix} \mathbf{K}_1[\mathbf{U}_1] \\ \vdots \\ \mathbf{K}_i[\mathbf{U}_i] \\ \vdots \\ \mathbf{K}_n[\mathbf{U}_n] \end{pmatrix} > \middle| \, f \in \mathbf{W}^{(k)},\ \mathbf{U}_i \subseteq \mathbf{W}_A,\ \mathbf{U}_1, \cdots, \mathbf{U}_n \subseteq \mathbf{W}^{(k)} \right\} \\
&\quad \cap \left\{ <f, \begin{pmatrix} \mathbf{K}_1[\mathbf{U}_1] \\ \vdots \\ \mathbf{K}_n[\mathbf{U}_n] \end{pmatrix} > \middle| \, f \in \mathbf{S}^{(k)},\ \mathbf{U}_1, \cdots, \mathbf{U}_n \subseteq \mathbf{S}^{(k)} \right\} \\
&= \left\{ <f, \begin{pmatrix} \mathbf{K}_1[\mathbf{U}_1] \\ \vdots \\ \mathbf{K}_i[\mathbf{U}_i] \\ \vdots \\ \mathbf{K}_n[\mathbf{U}_n] \end{pmatrix} > \middle| \, f \in \mathbf{S}^{(k)},\ \underbrace{(\mathbf{U}_i \subseteq \mathbf{W}_A \ \&\ \mathbf{U}_i \subseteq \mathbf{S}^{(k)})}_{\substack{\Updownarrow \text{ 仮定より} \\ \mathbf{U}_i \subseteq \mathbf{S}_{(k)}}},\ \mathbf{U}_1, \cdots, \mathbf{U}_n \subseteq \mathbf{S}^{(k)} \right\} \\
&= \mathbf{S}^{(k+1)}
\end{aligned}
$$